

ISME2015-10101820248

## استفاده از روش کانتروپوچ توسعه یافته در تحلیل خیز ورق مستطیلی ارتوتروپیک چندلایه ای متقارن

محمدسجاد رشیدپور<sup>۱</sup>، محمد اسدی<sup>۲</sup>، پیام عظیمی<sup>۳</sup>، هومن ریزه وند<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، مدرس دانشگاه جامع علمی-کاربردی، مرکز اسلام آبادغرب (خضراء)، m.s.rashidpour@gmail.com  
<sup>۲</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، msr1987@yahoo.com  
<sup>۳</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، مدرس دانشگاه جامع علمی-کاربردی، مرکز اسلام آبادغرب (خضراء)، payamazimi63@yahoo.com  
<sup>۴</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، مدرس دانشگاه جامع علمی-کاربردی، مرکز اسلام آبادغرب (خضراء)، hoomanrizvand@gmail.com

### چکیده

شد. روش کانتروپوچ توسط کر<sup>۱</sup> [۲]، در سال ۱۹۶۸ برای حل مسئله پیش میله منشوری با مقطع مستطیل شکل مورد استفاده قرار گرفت که نتایج این آنالیزها تطابق بسیاری با حل های شناخته شده قابل دسترس دارند. پس از آن این روش برای حل مسئله مقدار ویژه در سال ۱۹۶۹ توسط کر [۳]، ارتعاشات آزاد [۴]، کمناش [۵-۷] و آنالیز کرنش توسط کیم<sup>۲</sup> [۸] مورد توجه قرار گرفت. روش کانتروپوچ توسعه یافته برای اولین بار در مختصاتی غیرکارتزین، در مختصات قطبی توسط اقدام برای آنالیز تنش قطاع [۹] و خمش ورق قطاع نازک ارتوتروپ و ورق ضخیم ارتوتروپ [۱۰] و برای پنل استوانه ای کامپوزیتی توسط ابوحزمه [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۰۳ اقدام و همکارش به مطالعه استفاده از روش کانتروپوچ توسعه یافته در تحلیل خمش ورق‌های چند لایه ی مستطیلی با ضخامت متوسط و لبه گیردار [۱۲] و همچنین در سال ۲۰۰۸ به تحلیل خمش پانل استوانه ای شکل تحت بارگذاری یکنواخت و غیر یکنواخت [۱۳] پرداخته اند.

روش تکرار شونده کانتروپوچ توسعه یافته یکی از روش‌های نیمه تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل مختلف با مشتقات جزئی است که در این تحقیق بر پایه تئوری کلاسیک صفحات به کاربرد این روش به همراه اعمال روش باقیمانده وزنی گلرکین و استفاده از قضیه حساب تغییرات در محاسبه مقدار خیز تابع ورق مستطیل شکل ارتوتروپیک چندلایه‌ای متقارن تحت بارگذاری یکنواخت در شرایط مرزی ساده، گیردار و ترکیب آنها پرداخته شده است که جواب‌ها با نوع ورق ایزوتروپیک مقایسه شده است. در ادامه با توجه به شرایط مرزی، ثوابت توابع محاسبه شده که از طریق تکرار در حلقه این مقادیر به همگرایی مناسبی رسیده‌اند و در نهایت این مقادیر در تابع خیز ورق جایگذاری شده است. نتایج بیانگر همگرایی مناسب کاربرد روش کانتروپوچ توسعه یافته برای تابع خیز حاصل شده می‌باشد. در پایان مقایسه جواب که محاسبه مقدار خیز ورق می‌باشد با منابع معتبر، بیانگر دقت و سرعت استفاده از این روش در تحلیل این مسئله می‌باشد.

### استخراج معادلات خیز حاکم بر ورق

روابط تنش-کرنش برای مواد ارتوتروپیک در جهات اصلی و در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12}$$

روابط تعادل استاتیکی (باصرفه نظر کردن از نیروهای جسمی):

### واژه های کلیدی

خیز، کانتروپوچ توسعه یافته، ورق ارتوتروپیک چندلایه ای متقارن، تئوری کلاسیک صفحات

### مقدمه

روش کانتروپوچ توسعه یافته بعنوان یکی از روشهای حل نیمه تحلیلی در مسائل مکانیک شناخته می‌شود که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به دو یا چند معادله دیفرانسیل معمولی (بسته به تعداد متغیرهای معادله) تبدیل می‌کند. برخلاف دیگر روش‌های باقیمانده وزنی، در این روش حدس اولیه برای شروع دلخواه است و حتی لازم نیست شرایط مرزی را ارضا کند. سابقه بکارگیری روش کانتروپوچ توسعه یافته در تحلیل مسائل گوناگون مکانیکی بیانگر این است که فقط در تحلیل ورق ارتوتروپیک چند لایه ای متقارن کاربرد ندارد بطوریکه این روش نخستین بار توسط کانتروپوچ [۱] برای حل عددی مسائل خمش ورق های نازک مستطیلی در سال ۱۹۳۳ بکار گرفته

1 Kerr

2 Kim

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$D_{11} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = P(x, y)$$

### روش کانترویچ توسعه یافته

در این روش، معادلات حاکم بر مسئله که از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند و معمولاً فاقد جواب تحلیلی و حتی نیمه تحلیلی هستند به دو دسته معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. در بیشتر مسائل موجود معادلات دیفرانسیل معمولی بدست آمده دارای جواب تحلیلی هستند بنابراین می‌توان جواب نیمه تحلیلی برای معادلات حاکم بدست آورد. در این روش ابتدا تابع چندمتغیره جواب را بصورت حاصلضری از چند تابع تک متغیره از متغیره‌های موجود در تابع اصلی همانند زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y) = f(x) \cdot g(y) \quad (10)$$

در ابتدا یکی از توابع فوق را معلوم فرض کرده و تابعی برای آن حدس زده می‌شود بطوریکه شرایط مرزی را ارضا نماید. سپس رابطه (۱۰) در رابطه روش باقیمانده وزنی (گلرکین) قرار داده می‌شود که با فرض اخیر مبنی بر معلوم بودن یکی از توابع، روابط ساده شده و منجر به بدست آمدن یکی از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌شود که بسادگی قابل حل می‌باشد. با حل این معادله تابع دیگر بدست می‌آید، تکرار این بار با تابعی که بدست آمده انجام شده و معادله دیفرانسیل دیگری برحسب همان تابعی که در ابتدا معلوم فرض شده بدست می‌آید. در نهایت این تکرار آنقدر صورت می‌گیرد تا همگرایی لازم جواب حاصل شود.

### حل معادله خیز حاکم توسط روش کانترویچ توسعه یافته

با توجه به توضیحات عملکرد روش کانترویچ توسعه یافته، با قراردادن رابطه (۱۰) در (۹) خواهیم داشت:

$$D_{11} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} g(y) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} \right) + D_{22} \frac{d^4 g(y)}{dy^4} f(x) = P(x, y) \quad (11)$$

در رابطه بالا  $f(x)$  را بصورت زیر بادر نظرگیری شرایط مرزی معلوم فرض می‌کنیم سپس با ضرب طرفین رابطه (۱۱) در  $f(x)$  مطابق روش گلرکین درفاصله  $(L_x, 0)$  انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{L_x} D_{11} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} f(x) g(y) dx + \int_0^{L_x} 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} f(x) dx + \int_0^{L_x} D_{22} f^2(x) \frac{d^4 g(y)}{dy^4} dx = \int_0^{L_x} P(x, y) f(x) dx \quad (12)$$

با دسته بندی ضرایب معادله (۱۲) و در نظرگیری  $P(x, y)$  بصورت ثابت و گسترده  $(q)$  داریم:

منتجه های نیرو و ممان در واحد طول لایه میانی در حالت ورق چند لایه ای:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \quad \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3)$$

با ضرب روابط اول و دوم (۲) در  $Z$  و سپس انتگرال گیری در جهت  $Z$  داریم:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - q_y = 0 \quad (4)$$

با انتگرال گیری در جهت  $Z$  از معادله سوم (۲) داریم:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + P(x, y) = 0 \quad (5)$$

منتجه های ممان بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$M_x = D_{11} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{16} \left( -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$M_y = D_{21} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{22} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{26} \left( -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$M_{xy} = D_{16} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{26} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{66} \left( -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

در ادامه با قراردادن روابط (۶) در (۴)، روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$q_x = D_{11} \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + (D_{12} + 2D_{66}) \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + D_{16} \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + D_{26} \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$

$$q_y = D_{22} \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + (D_{21} + 2D_{66}) \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + D_{16} \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + D_{26} \left( -2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

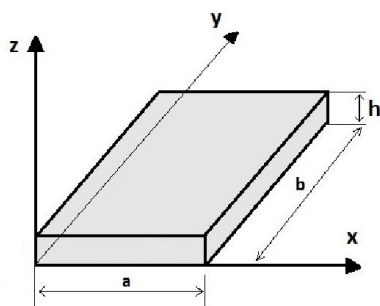
حال با قراردادن روابط (۷) در رابطه (۵) داریم:

$$D_{11} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + 4D_{16} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = P(x, y) \quad (8)$$

با فرض متقارن بودن ورق مستطیل ارتوتروپ یعنی  $D_{16} = D_{26} = 0$  معادله خیز ورق با لایه‌های ضخامت یکسان بصورت زیر می‌باشد:

### نتایج عددی

بعنوان نمونه یک ورق ایزوتروپیک از جنس آلومینیوم با خصوصیات زیر را در نظر می گیریم:



شکل ۱ - نمونه ورق مستطیلی ایزوتروپیک

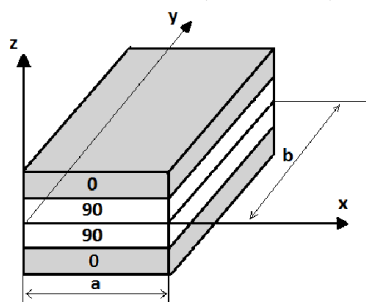
$a=100\text{mm}$ ,  $b=100\text{mm}$ ,  $h=0.8\text{mm}$ ,  $E=69\text{GPa}$ ,  $\nu=0.32$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 76870 & 24600 & 0 \\ 24600 & 76870 & 0 \\ 0 & 0 & 26130 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{\text{mm}^2} \right],$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3279.87 & 1047.89 & 0 \\ 1047.89 & 3279.87 & 0 \\ 0 & 0 & 1115.13 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{\text{mm}^2} \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} Q_{ij} (z_{h/2}^3 - z_{-h/2}^3)$$

خصوصیات ورق چندلایه ارتوتروپیک نمونه از جنس گرافیت-اپوکسی :



شکل ۲ - نمونه ورق مستطیلی ارتوتروپیک

$a=100\text{mm}$ ,  $b=100\text{mm}$ ,  $t=0.8\text{mm}$ ,

$\nu_{12}=0.28$ ,  $\nu_{13}=0.022$ ,  $E_{11}=9.8 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$ ,

$E_{22}=0.79 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$ ,  $G_{12}=0.56 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$

$$[Q_{0^0}] = \begin{bmatrix} 98623.259 & 2226.067 & 0 \\ 2226.067 & 7950.24 & 0 \\ 0 & 0 & 5600 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{\text{mm}^2} \right],$$

$$[Q_{90^0}] = \begin{bmatrix} 7950.24 & 2226.067 & 0 \\ 2226.067 & 98623.259 & 0 \\ 0 & 0 & 5600 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{\text{mm}^2} \right]$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3724.336 & 94.97889 & 0 \\ 94.97889 & 822.799 & 0 \\ 0 & 0 & 238.933 \end{bmatrix} \left[ \frac{N}{\text{mm}^2} \right]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (Q_{ij}) (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$A_4 \frac{d^4 g(y)}{dy^4} + A_2 \frac{d^2 g(y)}{dy^2} + A_0 g(y) = q \quad (13)$$

ثابتها باتوجه به معلوم بودن تابع  $f(x)$  بصورت زیر محاسبه می شود:

$$A_4 = \int_0^{L_x} D_{22} f^2(x) dx, A_2 = \int_0^{L_x} 2(D_{22} + 2D_{66}) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} f(x) dx$$

$$A_0 = \int_0^{L_x} D_{11} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} f(x) dx, q = \int_0^{L_x} p(x, y) f(x) dx$$

معادله مشخصه ی معادله (۱۳):

$$A_4 \lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0 = 0 \quad (15)$$

در نهایت با بدست آوردن جوابهای هموزن و خصوصی معادله، جواب کلی معادله بصورت زیر بدست می آید:

$$g(y) = e^{-\alpha y} [C_1 \cos(\beta y) + C_2 \sin(\beta y)] + e^{+\alpha y} [C_3 \cos(\beta y) + C_4 \sin(\beta y)] + B_0 \quad (16)$$

که در آن  $B_0 = q / A_0$  و برای بدست آوردن ضرایب  $C$  شرایط مرزی را اعمال می کنیم. با قراردادن رابطه (۱۰) در شرایط مرزی، رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\left[ -D_{21} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(y) - D_{22} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} f(x) \right]_{y=0, L_y} = 0 \quad (17)$$

حال با ضرب طرفین رابطه (۱۷) در  $f(x)$  و با انتگرال گیری مطابق روش گلرکین در بازه  $(0, L_x)$ :

$$\int_0^{L_x} (-D_{21} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} f(x) g(y)) dx - \int_0^{L_x} (D_{22} f^2(x) \frac{d^2 g(y)}{dy^2}) dx = 0$$

با دسته بندی ضرایب داریم:

$$-A_4 \frac{d^2 g(y)}{dy^2} - A_3 g(y) = 0$$

$$A_4 = \int_0^{L_x} D_{22} f^2(x) dx, A_3 = \int_0^{L_x} D_{21} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} f(x) dx \quad (19)$$

در ادامه با اعمال شرایط مرزی ضرایب  $C$  در نهایت  $g(y)$  بدست می آید. حال در رابطه (۱۰) این بار  $g(y)$  معلوم فرض شده و با قرار دادن تابعی که آنرا معلوم فرض نموده ایم در معادله (۱۱)، روند فوق را تکرار می کنیم و در نهایت مجدداً جواب نهایی معادله بصورت زیر بدست می آید:

$$f(x) = e^{-\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + e^{+\alpha x} [C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)] + B_0 \quad (20)$$

که در آن  $B_0 = q / A_0$  و برای بدست آوردن ضرایب  $C$  شرایط مرزی را اعمال می کنیم. این بار در رابطه (۱۱)،  $f(x)$  معلوم فرض کرده و روند قبلی را تکرار می کنیم و در نهایت با بهره گیری از برنامه نویسی کامپیوتری جوابهای مسئله را استخراج می کنیم.

هر چند تعداد لایه را بخوبی نشان می‌دهد و همچنین بیانگر عدم محدودیت کاربرد این روش در انتخاب شرایط مرزی ساده و گیردار نیز می‌باشد.

### مراجع

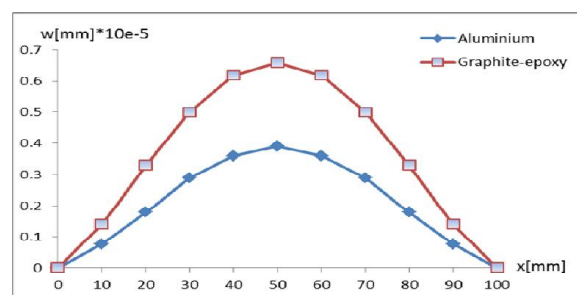
- [1] Kantorovich, LV., Krylor, VI., 1958. *Approximate method of higher anlysis*. Groningen:Noordholf;
- [2] Kerr, AD., 1968. "An extension of the Kantorovich method". *Q Appl Math*, Vol. 26, pp. 219–229.
- [3] Kerr, AD., 1969. "An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems". *Int J Solids Struct*, Vol. 5(6), pp. 559–572.
- [4] Jones, R., Milne, BJ., 1976. "Application of extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates". *J Sound Vib*, Vol. 45, pp. 309–316.
- [5] Yuan, S., Jin, Y., 1998. "Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method". *Comput Struct*, 66(6), pp. 861–867.
- [6] Ungbhakorn, V., Singhatanadgid, P., 2006. "Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method". *Compos Struct*, 73(1), pp. 120–8.
- [7] Jana, P., Bhaskar, K., 2006. "Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions". *Thin-Walled Struct*, 44(5), pp. 507–16.
- [8] Kim, HS., Cho, M., Kim, GI., 2000. "Free-edge strength analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method. *Composite Structure*", 49(2), pp. 229–35.
- [9] Aghdam, MM., Mohammadi, M., Erfanian, V., 2007. "Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method". *Thin-Walled Structure*, 45(12), pp. 983–990.
- [10] Aghdam, MM., Mohammadi, M., 2009. "Bending analysis of thick orthotropic sector plates with various loading and boundary conditions". *Compsite structure*, 88, pp. 212–218.
- [11] Abouhamze, M., Aghdam, MM., Alijani, F., 2007. "Bending analysis of symmetrically laminated cylindrical panels using the extended Kantorovich method". *Mech Adv Mater Struct*, 14(7), pp. 523–30.
- [12] Aghdam, MM., Falahatgar, SR., 2003. "Bending analysis of thick laminated plates using extended Kantorovich method". *Composite Structures*, 62, pp. 279–283.
- [13] Alijani, F., Aghdam, MM., Abouhamze, M., 2008. "Application of the extended Kantorovich method to the bending of clamped cylindrical panels", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27, pp. 378–388.
- [14] Timoshenko SP, Krieger SW., 1959. *Theory of plates and shells*: McGraw Hill Book Company Inc, 2nded, Tokyo.
- [15] Edery-Azulay, L., Abramovich, H., 2008. "Pizolaminated plates- Highly accurate solutions based on the extended Kantorovich method". *Composite Structures*, Vol. 84, pp. 241–244

جدول ۱: خیزماکزیمم ورق ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت ( $p=1[N/m^2]$ ) با شرایط مرزی مختلف

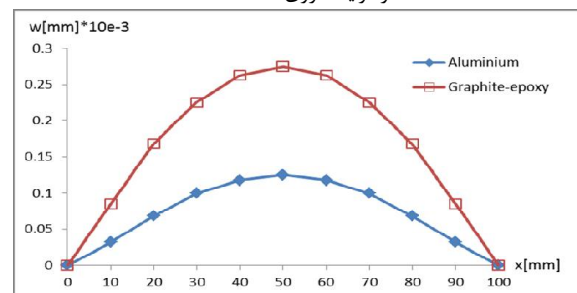
Aluminum plate			
B.C	Ref [14],w[m]	Ref [15],w[m]	Present, w[m]
SSSS	0.12388*10e-6	0.12386*10e-6	0.123764*10e-6
CCCC	0.38444*10e-7	0.38558*10e-7	0.385284*10e-7
SSCC	0.58581*10e-7	0.58370*10e-7	0.583259*10e-7

جدول ۲: خیزماکزیمم ورق ارتوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت ( $p=1[N/m^2]$ ) با شرایط مرزی مختلف

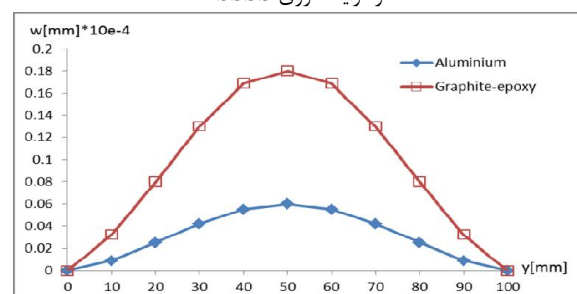
Graphite-epoxy plate			
B.C	Ref [14],w[m]	Ref [15],w[m]	Present, w[m]
SSSS	0.12388*10e-6	0.12386*10e-6	0.123764*10e-6
CCCC	0.38444*10e-7	0.38558*10e-7	0.385284*10e-7
SSCC	0.58581*10e-7	0.58370*10e-7	0.583259*10e-7



شکل ۳: جابجایی‌های عرضی ورق بر حسب x در راستای خط  $y=b/2$  در شرایط مرزی CCCC



شکل ۴: جابجایی‌های عرضی ورق بر حسب x در راستای خط  $y=b/2$  در شرایط مرزی SSSS



شکل ۵: جابجایی‌های عرضی ورق بر حسب y در راستای خط  $y=b/2$  در شرایط مرزی SSCC

### نتیجه‌گیری

مشاهده نتایج بدست آمده در جداول و نمودارها و مقایسه آنها با نتایج موجود در مراجع، دقت و همگرایی مناسب استفاده از روش کانتروپج توسعه یافته در شرایط مرزی ساده و گیردار صفحات چندلایه با