ISMESTU2014-3187

تحلیل خیز ورق مستطیلی بر پایه تئوری کلاسیک با شرایط مرزی گیردار با استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته

محمدسجاد رشیدپور[۱] ، میلاد سعیدی فر[۲]

[۱]کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، مرکز آموزش‌علمی-کاربردی اسلام آبادغرب(خضراء) m.s.rashidpour@gmail.com
[۲]دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر milad.saeedifar@aut.ac.ir

چکیده

دراین تحقیق ابتدا معادلات حاکم بر ورق درمختصات کارتزین بر پایه تئوری کلاسیک صفحات استخراج گردیده و درادامه با استفاده از روش تکرار شونده کانترویچ توسعه یافته که یکی از روش های نیمه تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است وهمچنین اعمال روش باقیمانده وزنی گلرکین و استفاده از قضیه حساب تغییرات به تحلیل خمش و محاسبه مقدار خیز تابع تحت بارگذاری یکنواخت پرداخته شده است. سپس با توجه به شرایط مرزی گیردار، ثوابت توابع محاسبه شده که از طریق تکرار در حلقه درنهایت این مقادیر به همگرایی مناسبی رسیده‌اند. درادامه این مقادیر در تابع خیز ورق جایگذاری شده که نتایج بیانگر همگرایی مناسب برای تابع خیز حاصل شده می‌باشد. درپایان مقایسه جواب که محاسبه مقدار خیز ورق می‌باشد با منابع معتبر، دقت و سرعت استفاده از روش کانترویچ توسعه یافته درتحلیل این مسئله را بخوبی نشان می‌دهد.

واژه های کلیدی

خیز ، روش کانترویچ توسعه یافته، روش باقیمانده وزنی گلرکین، ورق مستطیل شکل، تئوری کلاسیک صفحات

مقدمه

درتحلیـل مسـائل مهـم مکانیـک از جملـه مسـئله خمـش، کمـانش وارتعاشات و... تاکنون روش‌های مختلفی که شامل حل‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی است توسط محققـین بکـار بـرده شـده اسـت. روش کانترویچ توسعه یافته [۱]یکی از روش‌های نیمه تحلیلـی در حـل این دسته از مسائل است که برای اولین بار توسط کر[۲] درسال ۱۹۶۸ باتوسعه روش کانترویچ برای بدست آوردن حل تقریبی پـیچش یـک تیر ایزوتروپیک بکار برده شد[۱] نتایج این آنالیزها تطابق بسیارخوبی با حل های شناخته شده ای که در دسترس مـی باشـند دارنـد. ایـن روش در برخی ازحالت‌ها بـرای حـل مسـائل خمـش وکمـانش قـبلاً بکـارگیری شـده اسـت. ازجملـه تحلیـل ورق باضـخامت متغیـر[۲]، کمانش ورق‌های مستطیل شکل باشرایط مرزی تکیه گاه گیردار[۳]و همچنین تحلیل خمش ورق هـای متشـکل از مـواد کـامپوزیتی[۴]. برای اولین بار روش کانترویچ توسعه یافته در مختصاتی غیرکارتزین ، در مختصات قطبی توسط اقدم برای آنالیز تـنش قطـاع[۵] وخمـش ورق قطـاع نـازک ارتـوتروپ ورق ضـخیم ارتـوتروپ[۶] وبـرای پنـل استوانه ای کامپوزیتی توسط ابوحمزه[۷] مورد بررسـی قـرار گرفـت. روش کانترویچ توسعه یافته هیچ‌گونه محدودیتی برای شرایط مـرزی تکیه‌گاهی مختلف ونحوه بارگذاری روی ورق ندارد.

روش کانترویچ توسعه یافته

دراین روش، معادلات حاکم برمسئله که ازنوع معـادلا دیفرانسـیل بـا مشتقات جزئی می‌باشند ومعمولاً فاقد جـواب تحلیلـی وحتـی نیمـه تحلیلی هستند به دو دسته معادله دیفرانسیل معمـولی تبـدیل مـی-شوند. دربیشتر مسائل موجود معادلات دیفرانسـیل معمـولی بدسـت آمده دارای جواب تحلیلی هسـتند بنـابراین مـی تـوان جـواب نیمـه تحلیلی برای معادلات حاکم بدست آورد. از آن پس این روش به طور گسترده‌ای برای حل مسائل مکانیک جامدات ازجمله مسـائل مقـدار ویژه، کمانش، ارتعاشات آزاد ورق های نازک مستطیلی، خمش ورق-های ایزوتروپیک وارتوتروپیک ضخیم مستطیلی مـورد اسـتفاده قـرار گرفته است.

دراین روش ابتدا تابع چندمتغیره جـواب رابصـورت حاصلضـربی ازچند تابع تک متغیره از متغیرهای موجود در تابع اصلی بصورت زیر درنظر گرفته می‌شود که دراینجا تابع اصلی ما تابع خیز می‌باشد.

$$w_{ij}(x,y) = K.f_i(x).g_j(y) \qquad (۱)$$

K برای بی بعدکردن توابع $g_j(y)$, $f_i(x)$ می‌باشد.

درابتدا یکی از توابع فوق را معلوم فرض کرده وتابعی برای آن حـدس زده می‌شود بطوریکه شرایط مرزی را ارضا نماید. سپس رابطه (۱) در رابطه روش باقیمانده وزنی قرار داده می‌شود که با فرض اخیـر مبنـی بر معلوم بودن یکی از توابع، روابط ساده شده ومنجر به بدست آمـدن یکی ازمعادلات دیفرانسیل معمولی می‌شود کـه بسـادگی قابـل حـل می‌باشد. با حل این معادله تابع دیگر بدست می‌آید. تکرار این بـار بـا تابعی که بدست آمده انجام شده ومعادله دیفرانسیل دیگری برحسب همان تابعی که درابتدا معلوم فرض شده بدست می‌آید. درنهایت ایـن تکرار آنقدر صورت می‌گیرد تا همگرایی لازم حاصل شود.

[1] Extended kantorovich method
[2] Kerr

روش حل معادله خیز ورق با روش کانترویچ توسعه یافته

اگر طول وعرض ورق مستطیل شکل مورد نظر را به ترتیب a و b فرض نماییم با توجه به شرایط مرزی تمام گیردار[1] داریم:

$$w=\frac{dw}{dx}=0 \;\; for \;\; x=-a, x=a \;;-b\le y\le b$$

$$w=\frac{dw}{dy}=0 \;\; for \;\; y=-b, y=b \;;-a\le x\le a$$

معادله دیفرانسیل خیز ورق با مدول صلابت D بر مبنای تئوری کلاسیک بصورت زیر است:

$$\nabla^4 w(x,y)=\frac{q}{D} \qquad (۲)$$

که:

$$\nabla^4=\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \qquad (۳)$$

با فرض اولیه کانترویچ در رابطه (۱) و استفاده از روش باقیمانده وزنی گالرکین و همچنین استفاده از اصول حساب تغییرات داریم :

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(D\nabla^4 w-q)\delta w dx dy=0 \qquad (۴)$$

که در آن مدول صلابت بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)} \qquad (۵)$$

با فرض معلوم بودن تابع g مقدار δw بصورت زیر می‌باشد:

$$\delta w=g_j(y).\delta f_i \qquad (۶)$$

با قرار دادن رابطه (۱)و(۶) در (۴):

$$\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b}^{b}(D\nabla^4(f_i.g_j)-q)g_j dy\right]\delta f_i dx=0 \qquad (۷)$$

که این معادله با صفر قراردادن عبارت داخل کروشه ارضا می‌شود، یعنی:

$$\int_{-b}^{b}(D\nabla^4(f_i.g_j)-q)g_j dy=0 \qquad (۸)$$

ازطرفی با بسط تابع خیز(۲) وقراردادن رابطه (۱) در (۷) خواهیم داشت:

$$D\left[g(y)\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4}+2\left(\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right)+ + f(x)\frac{\partial^4 g(y)}{\partial y^4}\right]=q(x,y) \qquad (۹)$$

در ادامه با توجه به روابط ذکر شده فوق ودرنهایت طبق رابطه(۸) با انتگرال‌گیری از رابطه(۹) و با دسته بندی ضرایب، معادله دیفرانسیل بصورت زیر بدست می‌آید:

(۱۰)

$$\underbrace{\left[\int_{-b}^{b}g^2(y)dy\right]}_{A_1}\frac{d^4 f(x)}{dx^4}+\underbrace{\left[\int_{-b}^{b}2g(y)\frac{d^2 g(y)}{dy^2}dy\right]}_{A_2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$+\underbrace{\left[\int_{-b}^{b}g(y)\frac{d^4 g(y)}{dy^4}dy\right]}_{A_3}f(x)=\underbrace{D.q\left[\int_{-b}^{b}g^2(y)dy\right]}_{A_4}$$

به‌عبارتی بطور ساده تر :

$$A_1\frac{d^4 f(x)}{dx^4}+A_2\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+A_3 f(x)=A_4 \qquad (۱۱)$$

با درنظرگیری معادله مشخصه معادله (۱۰) که دارای چهار ریشه می‌باشد، جواب معادله بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{-a_1x}C_1\cos(b_1x)+e^{-a_1x}C_2\sin(b_1x)+\\&e^{a_1x}C_3\cos(b_1x)+e^{a_1x}C_4\sin(b_1x)+C_5\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که درآن $C_5=A_4/A_3$ وثوابت C_i با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. به همین ترتیب این بار با داشتن تابع f اخیر همین مراحل را برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب g تکرار شده تا ازآن تابع جدیدg بصورت زیر بدست آید.:

$$\begin{aligned}g(y)&=e^{-a_2y}D_1\cos(b_2y)+e^{-a_2y}D_2\sin(b_2y)+\\&e^{a_2y}D_3\cos(b_2y)+e^{a_2y}D_4\sin(b_2y)+D_5\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

این عملیات آنقدر تکرار می‌شود تا توابع f و g بقدر کافی اصلاح شده ودرنهایت طبق رابطه(۱) باضرب این دوتابع، تابع خیز بدست می‌آید.

نتایج عددی

روش کانترویچ توسعه یافته توسط نرم افزار برای ورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های تمام گیردار درلبه ها تحت بارگذاری یکنواخت وبا ویژگی‌های زیر نوشته شده است:

2a=1m, 2b=1.5m, h=8mm, E=69GPa, ν=0.3, q=1000N

که با اعمال فرآیند عملکرد روش ذکرشده، پارامترهای تعیین کننده توابع fوg بقدر همگرایی لازم بصورت جدول زیر اصلاح شده است.

جدول۱: مقادیر همگراشده پارامترهایaوb مربوط به توابع fو g

پارامترها	تکرار مرحله اول	تکرار مرحله دوم	تکرار مرحله سوم
a_{1i}	2.7668	2.8481	2.8481
b_{1i}	1.5238	1.8054	1.8054
a_{2i}	4.1474	4.1475	4.1476
b_{2i}	2.3287	2.3285	2.3283

[1] CCCC

جدول ۲: مقادیر همگراشده پارامترهایC مربوط به توابع fو g

پارامترها	تکرار مرحله اول	تکرار مرحله دوم	تکرار مرحله سوم
C_{1i}	0.0053	0.0039	0.0039
C_{2i}	0.0013	0.0002	0.0002
C_{3i}	0.0053	0.0039	0,0039
C_{4i}	0.0013	-0.0002	-0.0002
C_{5i}	-0.0128	0.0101	-0.0101

جدول ۳: مقادیر همگراشده پارامترهایD مربوط به توابع fو g

پارامترها	تکرار مرحله اول	تکرار مرحله دوم	تکرار مرحله سوم
D_{1i}	-0.0245	-0.0245	-0.0245
D_{2i}	0.0201	0.0201	0.0201
D_{3i}	-0.0245	-0.0245	0.0245
D_{4i}	-0.0201	-0.0201	-0.0201
D_{5i}	0.3471	0.3471	0.3471

بحث و بررسی نتایج

جدول ۴: پارامتر خیز(W) بدست آمده درهرمرحله ازتکرار ومقایسه بامرجع

پارامتر	تکرار مرحله اول	تکرار مرحله دوم	تکرار مرحله سوم	[۸]
W(خیز)	0.67758e-3	0.67754e-3	0.67752e-3	0.68002e-3

با توجه به به نتایج عددی جداول ۱،۲و۳ که همگرایی مناسب مقـادیر پارامترهـای بدسـت آمـده بـرای توابـع f وg را نشـان مـی‌دهـد، بـا جایگذاری این توابع در رابطه(۱) همانطوری که درجـدول۲ مشـاهده می‌شود مقدار خیز با سه مرحله تکرار به همگرایی مناسبی مـی‌رسـد که مقایسه جواب با مرجع[۸] عملکرد بسیار مناسب استفاده از روش تکرار شونده کانترویچ توسعه یافته در تحلیل خیز ورق را نشان مـی-دهد.

مراجع

[1] Kerr, A.D., 1968. “An Extension of Kantorovich Method”. *Quart, Appl. Marth*, Vol. 26, pp. 219-229.

[2] Fariborz, S.J., Pourbohloul A. 1999. “Application of the extended kantorovch method to the bending of variable thickness plates*”. J.comput struct*, Vol. 3, pp. 957-965.

[3] Yuan, S., Jin, Y., 1998. ”computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the advanced Kantorovich method”. *J.comput struct*, 66(6), pp. 861-867.

[4] Aghdam, M.M., Falahatgar, S.R., 2003. “Bending analysis of thick laminated plates using extended Kantorovich method”. *J.comput struct*, 62, pp. 279-283.

[5] Aghdam, M.M., Mohammadi, M., and Erfanian, V., 2007. "Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method". *Thin-Walled Structure*, 45(12), pp. 983–990.

[6] Aghdam, M.M., Mohammadi, M., 2009. “Bending analysis of thick orthotropic sector plates with various loading and boundary conditions”. *Compsite structure*, 88, pp. 212-218.

[7] Abouhamze, M., Aghdam, M.M., and Alijani, F., 2007.“Bending analysis of symmetrically laminated cylindrical panels using the extended Kantorovich method”, *Mech Adv Mater Struct*,14(7), pp. 523–530.

[8] Reddy, J.N., 2004. *Mechanics of laminated component plates and shells theory and analysis*. CRC Press, 2nd ed.

[9] Kerr, A.D., 1968. “An extension of the Kantorovich method”. *Q Appl Math*, 26, pp. 219-229

[10] Kerr, A.D., 1969. “An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems”. *Int J Solids Struct*, 5(6), pp. 559-572

[11] Ungbhakorn, V., Singhatanadgid, P., 2006. “Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method”. *Compos Struct*, 73(1), pp.120–128.

[12] Jones, R., Milne, B.J., 1976. “Application of extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates*”, J Sound Vib*, Vol.45, pp. 309–316.

[13] Joodaky, A., Joodaky, I., Hedayati, M., Masoomi, R., Borzabadi., and Farahani , E., 2013. “Deflection and Stress Analysis of Thin FGM Skew Plates on Winkler Foundation with Various Boundary Conditions Using Extended Kantorovich Method”. *Composites: Part B*. Vol. 51, pp. 191–196

[14] Fallah, A., Aghdam, M.M., and Kargarnovin, M.H., 2012. “Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method”. *Arch Appl Mech*. DOI 10.1007/s00419-012-0645-1

[15] Joodaky, A., Kargarnovin, M.H., Jafari Mehrabadi, S.,and Nasrollah Barati, A.H., 2012. “Bending and Deflection Analysis of Thin FGM Skew Plates using Extended Kantorovich Method”. *American Journal of Scientific Research*. ISSN 1450-223X, Issue 46, pp. 67-78

[16] Joodaky, A., Joodaky, I., Shahsanami, M., Sobhani Aragh, B., Habibi, A., and Abdoli, B., 2012. “Application of Extended Kantorovich Method in Deflection Analysis of Thin Clamped Skew Plates on Winkler Foundation”. *American Journal of Scientific Research*. ISSN 2301-2005 .,Issue 66., pp. 117-126

the extended Kantorovich method", *Composite Structure,* 49(2), pp. 229-235

[20] Edery-Azulay, L., Abramovich, H. 2008. "Piezolaminated plates-highly accurate solutions based on the extended Kantorovich method". Comput Struct,84(3), pp. 241-247

[21] Reddy, J.N., Wang, C.M., Lim, G.T., and Ng, K.H., 2001. "Bending solution of levinson beams and plates in term of the classical theories". *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 38, pp. 522-530

[17] Fallah, A., Kargarnovin, M.H., and Aghdam, M.M., 2011. "Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Fully Clamped Skew Plates Using Extended Kantorovich Method". *Key Engineerind Material*. Vols. 471-472, pp. 739-744

[18] Jana, P., Bhaskar, K., 2006. "Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions". *Thin-Walled Struct*,44(5), pp. 507-516

[19] Kim H.S., Cho, M., and Kim, G.I., 2000. "Free-edge strength analysis in composite laminated by